

Berechnung der Feigenbaumkonstanten

(Quellen: www.tud.ttu.ee/web/dmitri.kartofelev/YFX1560/LectureNotes_11.pdf
www.math.uni-hamburg.de/home/lauterbach/scripts/seminar03/sylvester
H.-O. Peitgen, H. Jürgens und D. Saupe: *Fractals for the Classroom*, New York, 1992)

Die Feigenbaumkonstante δ ist verknüpft mit dem Feigenbaumpunkt α , dem Grenzwert der Stellen r_n in der **Bahn** der **logistischen Funktion**, an denen eine 2^n -fache ($n = 1, 2, 3, \dots$) **Bifurkation** einsetzt. Die logistische Funktion f ist gegeben durch

$$(1) \quad f_r(x) = rx(1-x)$$

mit dem Parameter $r \in [0,4]$. Ihre Werte berechnen sich iterativ gemäß

$$(2) \quad x_{n+1} = f_r(x_n) .$$

Die Bahn von f_r ist der Grenzwert von x_{n+1} für $n \rightarrow \infty$, aufgetragen in Abhängigkeit des Parameters r .

Abbildung (1) zeigt die Bahn der logistischen Funktion im Intervall $[1,4]$. Der Bereich $r < 1$ ist für uns uninteressant, hier ist der Grenzwert Null.

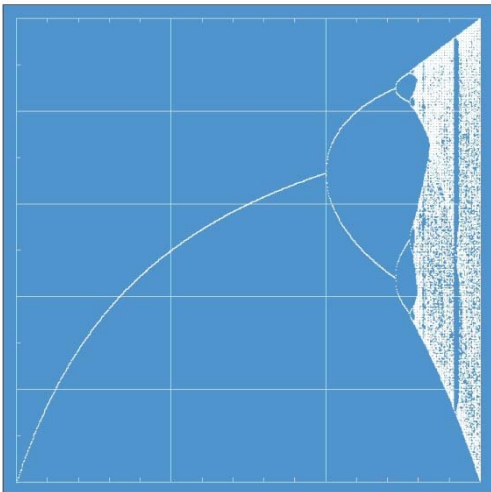


Abb. 1 Bahn (orbit diagram) der logistischen Funktion im Intervall $[1,4]$. Die Bahn ist der Grenzwert der Iteration $x_{n+1} = f_r(x_n)$ für $n \rightarrow \infty$ (y-Richtung), aufgetragen in Abhängigkeit von r (x-Richtung). Die Bahnwerte beginnen sich bei $r = 3$ in zwei Gabelzinken aufzuspalten. Diese Aufspaltung (Bifurkation) erfolgt danach mehrmals – bis bei $r \approx 3.56$ das Chaos erreicht wird.

Die Werte von α und δ sollen hier berechnet werden. Dazu benutzen wir die Tatsache, dass zwischen zwei aufeinander folgenden Bifurkationsstellen r_n und r_{n+1} immer eine Stelle $r = R_n$ liegt, die zu einem **superstabilen Fixpunkt** der logistischen Funktion mit der Periode 2^n gehört. Auf diese superstabilen Fixpunkte gehen wir noch ausführlich ein.

Die schematische Skizze der Bahn in Abbildung (2) zeigt, dass die Stellen r_n der Bifurkationspunkte und die Stellen R_n der superstabilen Punkte (blau bzw. rot) beide denselben Grenzwert $r_\infty = R_\infty = \alpha$ haben, also

$$(3) \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

Die Feigenbaumkonstante δ ergibt sich aus den Quotienten der Abstände benachbarter Werte r_n laut Definition zu

$$(4) \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{r_n - r_{n-1}} .$$

Da r_n und R_n denselben Grenzwert haben, berechnen wir δ indem wir in dieser Gleichung r_n durch R_n ersetzen, also

$$(5) \quad \delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{n-1} - R_{n-2}}{R_n - R_{n-1}}$$

benutzen.

Die folgenden Zeilen sind eine Ausarbeitung der in den Quellen^{1,2,3} genannten Arbeiten. Ich habe zum Teil die Formelsymbole dieser Arbeiten übernommen.

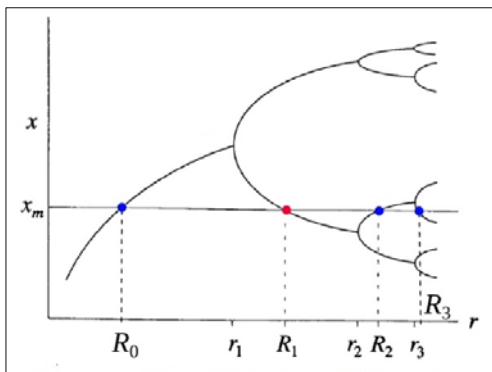


Abb. 2 Schematische Skizze der Bahn von $f_r(x)$ mit den Bifurkationsstellen (r_1 , r_2 und r_3) und den Stellen der superstabilen Punkte (R_0 , R_1 , R_2 und R_3 : blau bzw. rot). Die Bahnwerte an den superstabilen Punkten sind $x_m = 1/2$. Quelle: D. Kartofelev, Nonlinear Dynamics, Lecture Notes #11.

Die Tatsache der Bifurkationspunkte bedeutet, dass die Bahn nicht dem Typ einer analytischen Funktion folgt. Eine Bifurkation tritt zum ersten Mal auf bei $r = 3$. Weitere folgen in immer kleineren Abständen bis zu einer Grenze bei etwa $r = 3,56$. Dabei verdoppelt sich jeweils die Anzahl oder **Periode** der Bahnwerte. Diese **Periodenverdopplung** geht einher mit einer (Mehrfach-)Anwendung von $f(x)$. Mit jeder Bifurkation ist die Funktion einmal mehr auf die Variable x anzuwenden, also

$$f^{2^n}(x) = f(f(x)), f(f(f(x))), \dots, n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Grenzwerte der Iteration nach Gleichung (2) zeigen oberhalb der genannten Grenze bei $r \approx 3,56$ ein völlig unregelmäßiges Verhalten. Dies ist das Gebiet, das als **Chaos** bezeichnet wird.

Nun zu den *superstabilen* Stellen der Bahn von f . Es sind die Parameterwerte r , für die der Graph $f_r(x)$ **Fixpunkte** besitzt, die bestimmte Kriterien erfüllen. Zum Verständnis dieser Punkte holen wir weit aus. Fixpunkte der logistischen Funktion sind die Stellen x , für die gilt

$$(6) \quad f(x) = x .$$

Damit folgt für x

$$rx(1-x) = x .$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben

$$rx(1-x) - x = 0 \Leftrightarrow x(r - rx - 1) = 0 ,$$

so dass die Lösungen

$$(7) \quad x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{r-1}{r}$$

sind.

Man unterscheidet **stabile und instabile Fixpunkte**. Ist der Absolutbetrag der Steigung an der Stelle x kleiner als 1, handelt es sich um einen stabilen Fixpunkt, ist er größer als 1, um einen instabilen Fixpunkt. Die Steigung von $f(x)$ ist gegeben durch

$$(8) \quad f'(x) = r[(1-x) + x(-1)] = r(1-2x) \quad .$$

Im Bereich $1 < r < 3$ ist damit

$$|f'(0)| = r > 1$$

und

$$\left| f'\left(\frac{r-1}{r}\right) \right| = \left| r\left(1 - 2\frac{r-1}{r}\right) \right| = |2 - r| < 1 \quad .$$

Also ist die Lösung $x = 0$ ein instabiler und $x = \frac{r-1}{r}$ ein stabiler Fixpunkt.

Stabile Fixpunkte genügen also dem Kriterium

$$(9) \quad x = f(x) \quad \wedge \quad |f'(x)| < 1 \quad .$$

Sie werden auch **Attraktoren** genannt, weil sie Anfangswerte in ihrer Umgebung im Verlauf der Iteration zu sich hinziehen. Instabile Fixpunkte sind **Repeller**, sie stoßen Anfangswerte in ihrer Umgebung bei der Iteration von sich weg.

Ein **stabiler Fixpunkt**, also Attraktor, für $f(x) = 2,75x(1-x)$ ist beispielsweise $x = 0,6363\dots$. Der Anfangswert $x_0 = 0,1$ erzeugt nach vielen Iterationen den Grenzwert $0,6363\dots$. Die ersten 20 Iterierten x_n zeigt der linke Graph von Abbildung (3). Der rechte Graph verdeutlicht, wie sich der Grenzwert aus dem Anfangswert $x_0 = 0,1$ heraus entwickelt und im Verlauf der Iteration zum Attraktor $x = 0,6363\dots$ angezogen wird: Die erste Iterierte x_1 ist $f_{2,75}(0,1) = 0,2475$. Sie wird abgelesen als Ordinate am Schnittpunkt der Senkrechten durch x_0 mit der logistischen Kurve (rot). Von diesem Wert aus geht man horizontal in Richtung auf die Winkelhalbierenden zu. Diese blau gezeichnete Gerade trifft man an der Stelle $0,2475$. Man errichtet wiederum die Senkrechte, die jetzt die logistische Kurve (rot) bei $f_{2,75}(0,2475) = 0,5121\dots$ erreicht. Das ist die zweite Näherung x_2 . Von hier aus erreicht man wiederum auf gleicher Höhe die Winkelhalbierende (blau), errichtet im Schnittpunkt wiederum die Senkrechte, und liest an der Kurve (rot) die nächste Näherung $x_3 = 0,6870\dots$ ab. Danach verlässt man die Treppe, verfährt aber weiter nach dem Schema: Horizontale bis zur Winkelhalbierenden, Vertikale bis zur Kurve. Dass der nächste Wert $x_4 = 0,5912\dots$ auf der Kurve *unterhalb* der Winkelhalbierenden liegt, darf nicht irritieren. Nochmalige Wiederholung ergibt den Wert $x_5 = 0,6646\dots$, der wieder oberhalb der Winkelhalbierenden liegt. Und so geht es weiter, jetzt in Form einer Spirale. Es entsteht ein Spinnennetz mit immer kleiner werdendem Umfang, in dem der Grenzwert $0,6363\dots$, der Fixpunkt der Abbildung $x_{n+1} = f_{2,75}(x_n)$, eingefangen wird. Wir rechnen nach: es gilt in der Tat, wie in Gleichung (6) gefordert, $f_{2,75}(0,6363\dots) = 0,6363\dots$.

Das Programm zur Darstellung der Iterationstreppe und dem Spinnennetz wurde einer Arbeit von Grzech⁴ entnommen.

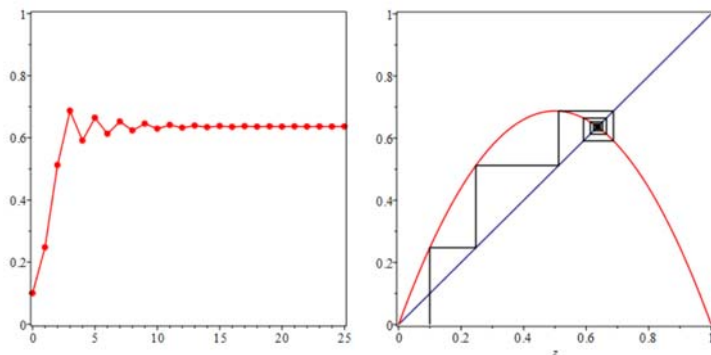


Abb. 3 Die ersten 20 Iterierten x_n der logistischen Funktion $f(x) = 2.75 x(1-x)$ für den Anfangswert $x_0 = 0.1$, aufgetragen über der Schrittzahl n (links). Rechts der Graph der logistischen Funktion $f(x)$ (rot) und die Winkelhalbierende $g(x) = x$ (blau). Dazwischen die Treppe und das Spinnennetz der Näherungswerte (schwarz). Die Näherungen konvergieren für $n \rightarrow \infty$ gegen den stabilen Fixpunkt (Attraktor) $(x, f(x)) = (0.6363, 0.6363)$. Diese und die folgenden Skizzen wurden erstellt mit Maple, das Programm dazu ist einer Arbeit von Grzech⁴ entnommen.

Wir wenden uns jetzt den **superstabilen Fixpunkten** zu. Sie erfüllen verständlicherweise das Kriterium $x = f(x)$ für Fixpunkte, haben aber darüber hinaus die Eigenschaft, dass die Steigung an der Stelle x der Fixpunkte gleich Null ist. Für sie gilt also

$$(10) \quad x = f(x) \quad \wedge \quad |f'(x)| = 0 \quad .$$

Man kann zeigen, dass Iterationen bei Annäherung an einen superstabilen Fixpunkt quadratisch konvergieren. Außerdem benötigt man weniger Iterationen, um diesen zu erreichen. In unserem Fall ist die Ableitung an den Stellen der Fixpunkte $x = 0$ und $x = (r-1)/r$ gleich $f'(0) = r$ bzw. $f'(1-1/r) = 2-r$. Sie sind Null für $r = 0$ bzw. $r = 2$. Das heißt, einen superstabilen Fixpunkt gibt es, sieht man von dem trivialen Fall $r = 0$ ab, nur für den Parameter $r = 2$. Der Fixpunkt ist daher ein Punkt der logistischen Funktion $f(x) = 2x(1-x)$, und liegt an der Stelle $x = 0.5$ des Maximums.

Abbildung (4) zeigt die Annäherung des Anfangswerts $x_0 = 0.1$ an den superstabilen Fixpunkt $(x, f(x)) = (0.5, 0.5)$ für die logistische Funktion $f(x) = 2x(1-x)$ mit $r = 2$.

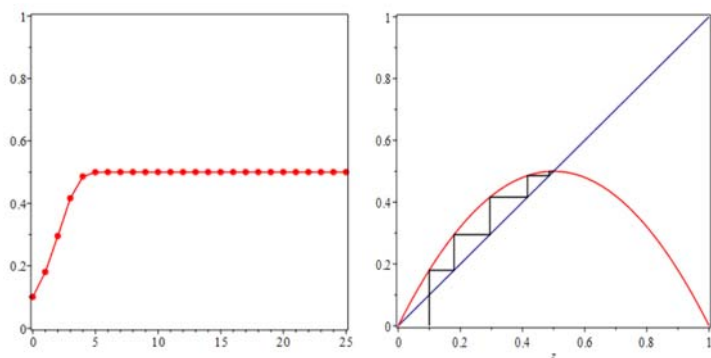


Abb. 4 Die ersten 20 Iterierten x_n der logistischen Funktion $f(x) = 2.00 x(1-x)$ für den Anfangswert $x_0 = 0.1$, aufgetragen über der Schrittzahl n (links). Rechts der Graph der logistischen Funktion $f(x)$ (rot) und die Winkelhalbierende $g(x) = x$ (blau). Dazwischen die Treppe der Näherungswerte (schwarz). Die Näherungen konvergieren für $n \rightarrow \infty$ in etwa fünf Schritten gegen den superstabilen Fixpunkt $(x, f(x)) = (0.5, 0.5)$.

Für die folgenden Überlegungen stellen wir fest: Die logistische Funktion $f(x, r) = 2x(1-x)$ mit $r = 2$ besitzt einen superstabilen Fixpunkt an der Stelle $x = 0.5$ mit dem Wert $f(x) = 0.5$. Im Bahn-Diagramm Abbildung (2) ist die entsprechende Stelle des Parameters r mit R_0 bezeichnet. Also

$$(11) \quad r = R_0 = 2 \quad (\text{Stelle des superstabilen Fixpunkts von } f(x))$$

Superstabile Fixpunkte gibt es auch im Fall 2-fach, 4-fach, ..., generell 2^n -fach periodischer Bahnen. Eine 2^n -fach periodische Bahn entsteht, wie schon gesagt, durch die 2^n -fach hintereinander ausgeführte Anwendung der logistischen Funktion $f(x)$. Dieser Bahn entsprechen die superstabilen Fixpunkte der Periode 2^n . Es sind diejenigen Fixpunkte x , für die gilt

$$(12) \quad f^{2^n}(x) = x \quad \wedge \quad x = \max f(x) \quad \text{oder} \quad f^{2^n}(x) = x \quad \wedge \quad x = \min f(x).$$

Als Beispiel berechnen wir die superstabilen Fixpunkte der Periode 2 bzw. $n = 1$. Wir gehen aus von der logistischen Funktion

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = r[(rx(1-x)(1-(rx(1-x))))] \\ &= r^2x(1-x)(1-rx(1-x)) \\ &= -r^3x^4 + 2r^3x^3 - (r^3 + r^2)x^2 + r^2x \end{aligned}$$

Die Fixpunkte von $f^2(x)$ sind die Lösungen der Gleichung $f^2(x) = x$. Wir schreiben also

$$\begin{aligned} &-r^3x^4 + 2r^3x^3 - (r^3 + r^2)x^2 + r^2x = x \\ (13) \quad &\Leftrightarrow x[x^3 - 2x^2 + (1 + \frac{1}{r})x + (\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r})] = 0 \end{aligned}$$

Damit ist $x = 0$ eine Lösung. Aus dem Term in eckigen Klammern lässt sich ein weiterer Linearfaktor abspalten, nämlich der mit der zweiten Lösung $x = (r-1)/r$ von Gleichung (7). Das ergibt (hier vertrauen wir auf Maple)

$$\frac{1}{r^2}[1 + r^2(x^2 - x) + r(1 - x)] = 0$$

und schließlich

$$\begin{aligned} &x^2 - x + (1-x)\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = 0 \\ \Leftrightarrow &x^2 - (1 + \frac{1}{r})x + (1 + \frac{1}{r^2}) = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der pq -Formel folgt daraus

$$(14) \quad x = \frac{1}{2r}(r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}).$$

Wir verzichten darauf, zu untersuchen, ob die drei Lösungen von Gleichung (13), die Fixpunkte von $f^2(x)$, stabile oder instabile Fixpunkte sind.

Denn uns interessieren die superstabilen Fixpunkte von $f^2(x)$. Für diese gilt $(f^2)'(x) = 0$. Die Ableitung von $f^2(x)$ lautet

$$(f^2)'(x) = -4r^3x^3 + 6r^3x^2 - 2(r^3 + r^2)x + r^2$$

Die superstabilen Fixpunkte sind daher die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{r})x - \frac{1}{4r} = 0.$$

Diese sind (Maple rechnet für uns)

$$(15) \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{2r}(r \pm \sqrt{r^2 - 2r}).$$

Das heißt, es gibt unabhängig von r einen superstabilen Fixpunkt bei $x = 0,5$ und zwei weitere Stellen, deren Werte von r abhängen. Mögliche Werte von r erhält man, indem man die rechte Seite der zweiten Lösung (15) mit der rechten Seite von Gleichung (8) vergleicht. Gleichsetzung ergibt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2r}(r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}) &= \frac{1}{2r}(r \pm \sqrt{r^2 - 2r}) \\ \Leftrightarrow 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3} &= \pm \sqrt{r^2 - 2r} \\ \Leftrightarrow \sqrt{r^2 - 2r - 3} &= -1 \pm \sqrt{r^2 - 2r}\end{aligned}$$

Durch Quadrieren folgt

$$\begin{aligned}\Rightarrow r^2 - 2r - 3 &= 1 \mp 2\sqrt{r^2 - 2r} + r^2 - 2r \\ \Leftrightarrow \mp \sqrt{r^2 - 2r} &= -2\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\Rightarrow r^2 - 2r &= 4 \\ \Leftrightarrow r^2 - 2r - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= 1 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $r = 1 + \sqrt{5}$ überzeugt man sich, dass die positive Zahl

$$(16) \quad r = 1 + \sqrt{5}$$

eine mögliche Lösung ist. ($r = 1 - \sqrt{5} < 0$ kommt nicht in Frage, da $r > 0$ vorausgesetzt ist). Damit hat $f^2(x)$ superstabile Fixpunkte bei

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} = 0,5 \quad \text{und} \\ x &= \frac{1}{2(1 + \sqrt{5})}[(1 + \sqrt{5}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5})}] = 0,8090169944\end{aligned}$$

Den Parameter r für diese Fixpunkte (von Interesse ist vor allem der bei $x = 0,5$) bezeichnen wir mit

$$(17) \quad R_1 = 1 + \sqrt{5} = 3,2360679774977.$$

Er ist im Bahn-Diagramm Abbildung (2) mit der Farbe rot gekennzeichnet.

Es gibt also zwei superstabile Fixpunkte von f^2 , sie sind $(x, f^2(x)) = (0,5, 0,5)$ und $(0,809..., 0,809)$. Interessant ist, dass *einer* dieser superstabilen Fixpunkte der Periode 2 auch superstabiler Fixpunkt der Ausgangsfunktion f ist – nämlich der Punkt $(x, f(x)) = (0,5, 0,5)$. Wir nehmen das ohne Beweis hin, Abbildung 5 stellt diesen Sachverhalt dar.

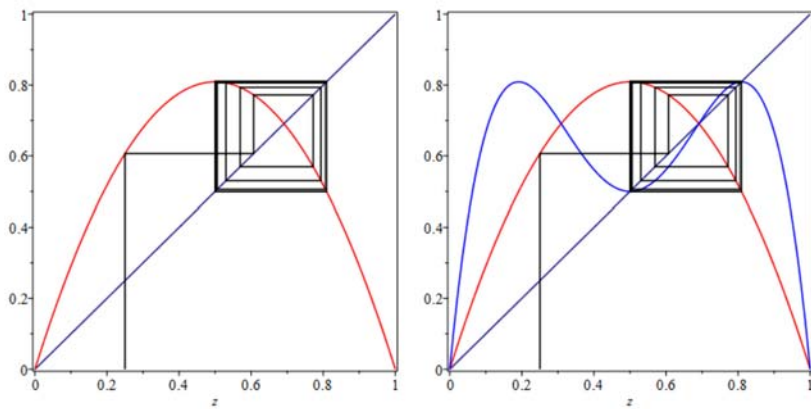


Abb. 5 Superstabile Fixpunkte der Periode 2. Es ist $f^2(x, r) = x$ und $d[f^2(x, r)]/dx = 0$, mit $r = 1+\sqrt{5}$. Die beiden Stellen der Punkte sind $x = 0.5$ (linkes Bild) bzw. $x = 0.8090169941$ (rechtes Bild). Der superstabile Fixpunkt der Funktion $f^2(x)$ bei $x = 0.5$ (rechtes Bild), ist auch der superstabile Fixpunkt der Ausgangsfunktion $f(x)$ (linkes Bild).

Für die Berechnung der Feigenbaumkonstanten ist der Fixpunkt bei $x = 0,5$ von Interesse, den sowohl f als auch f^2 haben. Man kann sogar zeigen, dass alle logistischen Funktionen der Periode 2^n mit $n = 1, 2, 3, \dots$ usw. einen solchen superstabilen Fixpunkt haben. Abbildung (6) zeigt dies für $2^n = 1, 2, 4$ und 8 .

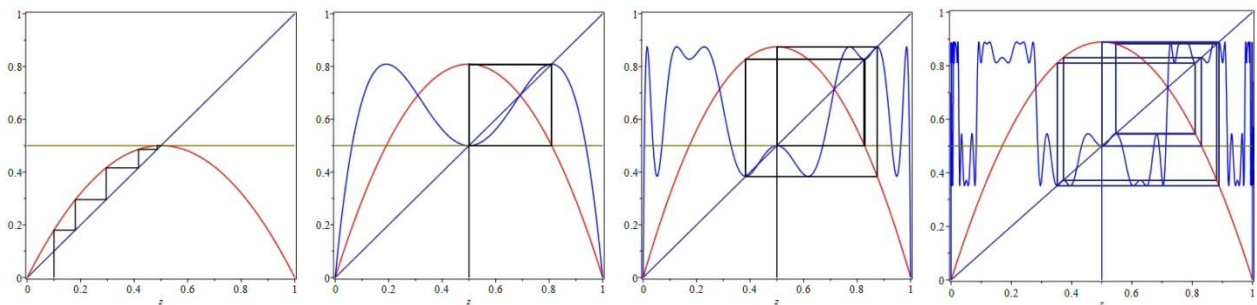


Abb. 6 Superstabile Fixpunkte an der Stelle $x = 1/2$ (mit dem Funktionswert $1/2$) der Funktionen f mit einfacher-, 2-facher- 4-facher und 8-facher Periode.

Wir nehmen dies ohne Begründung hin, halten aber fest, dass alle logistischen Funktionen $f^{2^n}(x, r)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ usw. einen superstabilen Fixpunkt bei $x = 0,5$ mit dem Funktionswert $0,5$ haben. Diese Tatsache benutzen wir, um die Parameterwerte $r = R_n$ zu berechnen, deren Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ der Feigenbaumpunkt α ist.

Nun zur eigentlichen Rechnung. Ziel ist ein Näherungswert für α (und δ). Feigenbaum hat ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren⁵ zur Berechnung von $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ vorgeschlagen, dessen Numerik wir hier versuchen zu verstehen. Wir gehen aus von den Startwerten

$$\begin{aligned} R_0 &= 2 \\ R_1 &= 1 + \sqrt{5} = 3,23606... \\ \delta_1 &= 4 \end{aligned}$$

und berechnen zunächst eine (grobe) Näherung für R_n aus den vorher bestimmten Werten R_{n-1} , R_{n-2} und δ_{n-1} . Dazu benutzen wir Gleichung (5), die zu

$$(18) \quad R_n = R_{n-1} + \frac{R_{n-1} - R_{n-2}}{\delta_{n-1}}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

umgeformt wird. Dieses R_n wird dann durch sukzessive Approximation mit Hilfe des Newton-Verfahrens korrigiert.

Die Korrektur besteht darin, den Parameter R_n , und damit das r_n der logistischen Funktion $f^{2^n}(x, r_n)$ (zumindest näherungsweise) so zu bestimmen, dass ihr superstabiler Fixpunkt bei $x = 0,5$ mit dem Wert $0,5$ liegt. Das heißt, r muss der Forderung

$$(19) \quad f^{2^n}\left(\frac{1}{2}, r_n\right) = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad g(r) = f^{2^n}\left(\frac{1}{2}, r_n\right) - \frac{1}{2} = 0$$

genügen. Diese nichtlineare Gleichung wird, wie schon erwähnt, nach dem Newton-Verfahren gelöst. Da $g(r)$ eine Funktion von r ist, dem Parameter, nach dem wir suchen, ist die Ableitung $g'(r)$ in der Newtonschen Formel

$$r_k = r_{k-1} - \frac{g(r_{k-1})}{g'(r_{k-1})}$$

die Ableitung nach der Variablen r . Die Iteration

$$(20) \quad R_{n+1}^k = R_{n+1}^{k-1} - \frac{g(R_{n+1}^{k-1})}{g'(R_{n+1}^{k-1})}$$

wird für $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^n - 1$ ausgeführt. Das heißt, sie ist so oft zu wiederholen wie die Periode 2^n der Bahn nach der n -ten Bifurkationsstelle. Ist die relative Differenz benachbarter Approximationen

$$(21) \quad \frac{R_{n+1}^{k+1} - R_{n+1}^k}{R_{n+1}^k}$$

danach noch größer als die angestrebte Genauigkeit, wird R_n weiter nach Newton bearbeitet. Es entstehen so mehrere, z. T. auch größere Blöcke von Newton-Iterationen, und zwar so lange, bis die Maschinengenauigkeit ($\approx 10^{-14}$) erreicht ist. Die Anzahl dieser Blöcke variiert je nach den Zahlenwerten.

$g(r)$ und die Ableitung $dg(r)/dr$ werden iterativ berechnet aus

$$(22) \quad \begin{aligned} g(r) : \quad x_0 &= \frac{1}{2}; \quad x_{k+1} = rx_k(1 - x_k); \quad k = 0, \dots, 2^n - 1 \quad \text{und} \quad g(r) = x_{2^n} - \frac{1}{2} \\ g'(r) : \quad x'_0 &= 0; \quad x'_{k+1} = x_k(1 - x_k) + r(1 - 2x_k)x'_k; \quad k = 0, \dots, 2^n - 1 \quad \text{und} \quad g'(r) = x'_{2^n} \end{aligned}$$

Dabei ist bei $g'(x, r)$ die Kettenregel $g'(x, r) = [rx(1 - x)]' = x(1 - x) + r x(1 - 2x) x'$ anzuwenden.

=====				
nr	(lastrN-rN)/rN	k	x	xBar

0	0,2820806857758		3,5450849718747	Anfangswert
		0	0,8862712429687	0,2500000000000
		1	0,3573251624024	-0,5838876624024
		2	0,8141071058619	-0,3610103554569
		3	0,5365015532022	0,9553330551603
			0,0365015532022	Korrektur
			3,5068767752621	rN nach Korrektur
1	0,0108952207509			
		0	0,8767191938155	0,2500000000000
		1	0,3790325316254	-0,5524712467826
		2	0,8254026156628	-0,2333696291124
		3	0,5053870156798	0,6767311839056
			0,0053870156798	Korrektur
			3,4989164273308	rN nach Korrektur
2	0,0022750894732			
		0	0,8747291068327	0,2500000000000
		1	0,3834046018928	-0,5459948173556
		2	0,8271631334379	-0,2090799069990
		3	0,5002200822259	0,6216387069506
			0,0002200822259	Korrektur
			3,4985623917415	rN nach Korrektur
3	0,0001011945907			
		0	0,8746405979354	0,2500000000000
		1	0,3835978525981	-0,5457073307995
		2	0,8272369670316	-0,2080173579453
		3	0,5000004287528	0,6192170337603
			0,0000004287528	Korrektur
			3,4985616993303	rN nach Korrektur
4	0,0000001979131			
		0	0,8746404248326	0,2500000000000
		1	0,3835982304517	-0,5457067685888
		2	0,8272371110644	-0,2080152813160
		3	0,5000000000016	0,6192122999751
			0,0000000000016	Korrektur
			3,4985616993277	rN nach Korrektur
5	0,0000000000008			
		0	0,8746404248319	0,2500000000000
		1	0,3835982304532	-0,5457067685867
		2	0,8272371110650	-0,2080152813081
		3	0,5000000000000	0,6192122999570
			-0,0000000000000	Korrektur
			3,4985616993277	rN, nächste Näherung R ₂
=====				

Tabelle 1 Newton-Verfahren zur Berechnung des Näherungswerts R_2 aus dem Vorgänger R_1 . Der Anfangswert 3,5450849718747 ist die »grobe« Näherung für R_2 . Das Newton-Verfahren wird in Blöcken zu je 4 Zeilen 6 Mal ausgeführt (siehe Text). Das Ergebnis $R_2 = 3,4985616993277$ erscheint in der letzten Zeile. Nach demselben Schema werden die Werte für $R_3 \dots R_{20}$ berechnet (sie sind numerisch korrekt bis etwa $n = 10$). Bezeichnungen nr , $|(\text{lastrN}-rN)/rN|$, k und x wie im Text, $xBar = x'$ ist die Ableitung von x nach r .

Als numerisches Beispiel betrachten wir die Iterationsschritte des Newton-Verfahrens, die von R_1 in Gleichung (17) ausgehend, zum nächsten Näherungswert R_2 führen. Sie sind in Tabelle 1 protokolliert.

In der Tabelle wird mit **nr** (Spalte 1) die Nummer der Newton-Blöcke angegeben. Dahinter steht in derselben Zeile der relative Fehler $|(\text{lastrN}-rN)/rN|$ benachbarter Näherungswerte nach Gleichung (21). Die Spalten **k**, **x** und **xBar** enthalten die Zahlenwerte von k , x und x' in Gleichung (22). In der obersten Zeile steht der Startwert für die Newton-Iteration. Er ist die »grobe« Näherung für R_2 und folgt aus R_0 , R_1 und δ_1 nach Gleichung (18).

$$R_2 = 3,2360679774998 + \frac{3,2360679774998 - 2}{4} = 3,54508497118747.$$

Es folgen rechts die Blöcke zu je 4 ($= 2^n$, $n = 2$) Zeilen der Newton-Iteration, unterbrochen von den Korrekturwerten (**Korrektur**) in Gleichung (20) und der neuen Näherung (**rN nach Korrektur**).

Einige Zahlenwerte rechnen wir per Hand nach (Zahlen auf 4 bzw. 5 Stellen hinter dem Komma gekürzt):

$$x_0 = R_2 (1 - x_0) = 3,5450 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5) = 0,8862$$

$$x'_0 = x_0(1 - x_0) + R_2(1 - 2x_0) \quad x'_0 = 0,5 \cdot 0,5 + 3,5450 \cdot (1 - 2 \cdot 0,8862) \cdot 0 = 0,25.$$

In der nächsten Zeile werden aus diesen Werten

$$x_1 = R_2 x_1 (1 - x_1) = 3,5450 \cdot 0,8862 \cdot (1 - 0,8862) = 0,3573$$

$$x'_1 = x_1(1 - x_1) + R_2(1 - 2x_1) \quad x'_1 = 0,8862 \cdot (1 - 0,8862) + 3,5450 \cdot (1 - 2 \cdot 0,8862) \cdot 0,25 = -0,5838.$$

Nach drei weiteren Iterationen erhält man (bitte selber nachrechnen)

$$x_3 = 0,5365015532022$$

$$x'_3 = 0,9553330551603.$$

Damit wird in der nächsten Zeile (**Korrektur**)

$$g(r) = 0,5365015532022 - 0,5 = 0,0365015532022 \quad \text{und}$$

$$g'(r) = 0,9553330551603.$$

Aus $g(r)$ und $g'(r)$ folgt als nächste Näherung (**rN nach Korrektur**) für den Parameter R der Wert

$$R_2 = R_2 - g(R_2)/g'(R_2)$$

$$= 3,5450849718747 - 0,0365015532022 / 0,9553330551603$$

$$= 3,5068767752621.$$

Dieser Wert ist vom Anfangswert 3,5450849718747 jedoch noch um weit mehr als 10^{-14} verschieden von der vorherigen Näherung. Daher erfolgt eine weitere Runde der Newton-Iterationen. Um auf die gewünschte Genauigkeit zu kommen, sind im vorliegenden Fall ($n = 2$) insgesamt 6 Blöcke von Newton-Iterationen mit jeweils 4 Zeilen nötig. Danach hat der unter **Korrektur** gelistete Wert lauter Nullen in den ersten dreizehn Stellen hinter dem Komma. Die neue Näherung an den Feigenbaumpunkt ist der unter **rN, nächste Näherung R_2** aufgeführte Wert $R_2 = 3,4985616993277$ in der untersten Zeile.

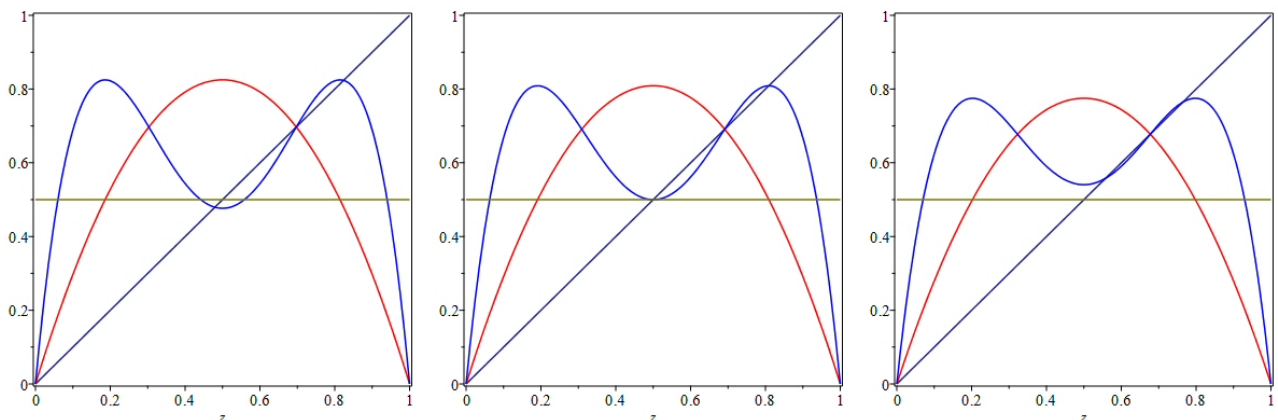


Abbildung 7 Drei Graphen logistischer Funktionen f_r^2 im Bereich der Bahnen der Periode 2 (zweifache Aufspaltung). Sie haben die Parameterwerte $r = 3,1$ (links), $3,23607$ (Mitte) und $3,3$ (rechts). Nur der Graph für $r = 3,23607$ (Mitte) hat an der Stelle $x = 0,5$ ein Minimum mit dem Funktionswert $0,5$. Das Programm ermittelt den Parameterwert, der genau diesem Graphen entspricht.

Die Arbeitsweise des Programms lässt sich mit Hilfe von Abbildung (7) veranschaulichen. Sie zeigt drei Graphen logistischer Funktionen f_r^2 im Bereich der Bahnen der Periode 2, d. h. im Gebiet zweifacher Aufspaltung. Die Graphen entsprechen den Parameterwerten $r = 3,1$ (links), $3,23607$ (Mitte) und $3,3$ (rechts). Nur der Graph für $r = 3,23607$ (Mitte) hat an der Stelle $x = 0,5$ ein Minimum mit dem Funktionswert $0,5$. Das Programm ermittelt die Parameterwerte R_n , die den Graphen mit genau dieser Eigenschaft entsprechen.

Tabelle 2 zeigt die vom Programm mit Hilfe der Gleichungen (17) bis (22) berechneten Parameterwerte R_n in Spalte **rN**. Deren Grenzwert ist der Feigenbaumpunkt $\alpha = R_\infty$. Mit **nr** ist die Anzahl der Newton-

Iterationen bezeichnet, die zur Berechnung von **rN** benötigt werden. Spalte **deltaN1** enthält die Näherungswerte für die Feigenbaumkonstante δ nach Gleichung (5).

Näherungswerte für den Feigenbaumpunkt α (Spalte rN) und die Feigenbaumkonstante δ (Spalte deltaN1)			
n	rN	nr	deltaN1
0	2,00000000000000		
1	3,2360679774998		4,00000000000000
2	3,4985616993277	6	4,7089430135405
3	3,5546408627688	4	4,6807709980107
4	3,5666673798563	4	4,6629596111141
5	3,5692435316371	3	4,6684039259180
6	3,5697952937499	3	4,6689537409485
7	3,5699134654223	3	4,6691571814003
8	3,5699387742333	2	4,6691910032120
9	3,5699441946081	2	4,6691994611323
10	3,5699453554865	2	4,6692011701107
11	3,5699456041111	1	4,6692017591474
12	3,5699456573589	2	4,6691988467383
13	3,5699456687629	2	4,6692200618119
14	3,5699456712053	2	4,6691837926205
15	3,5699456717284	1	4,6690224902626
16	3,5699456718404	1	4,6677577222563
17	3,5699456718645	5	4,6666728308307
18	3,5699456718695	2	4,7681862269641
19	3,5699456718706	9	4,6824938067713
20	3,5699456718706	2	-151,375000000000

Tabelle 2 Näherungswerte für den Feigenbaumpunkt α und die Feigenbaumkonstante δ . Die numerische Genauigkeit von δ nimmt oberhalb von $n = 10$ ab, da die superstabilen Punkte der Bahnen von f^{2^n} so dicht liegen, dass sie vom Rechenprogramm nicht unterschieden werden. Das Java-Programm wurde einer Arbeit von Sylvester² entnommen.

Das (Java-)Programm dazu wurde einer Arbeit von Sylvester² entnommen. Offenbar reicht die Maschinengenauigkeit aus, sich ohne Verlust an signifikanten Stellen bis etwa $n = 10$ (dem entspricht ein f hoch 2^{10}) zu den Literaturwerten hocharbeiten.

Anmerkungen und Literatur

- ¹ D. Kartofelev: Nonlinear Dynamics, Lecture Notes #11, Feigenbaum's Analysis of Period Doubling, www.tud.ttu.ee/web/dmitri.kartofelev/YFX1560/LectureNotes_11.pdf
- ² J. H- Sylvester: Die logistische Abbildung, Das Feigenbaum-Szenario, Seminarvortrag, www.math.uni-hamburg.de/home/lauderbach/scripts/seminar03/sylvester)
- ³ Hein-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe: Fractals for the Classroom, New York, 1992, Band 2, S. 224 ff.
- ⁴ N. Grzech: Die logistische Gleichung als ein Beispiel für chaotische Prozesse in der Physik, Examensarbeit, Universität Rostock, www.wsf.uni-rostock.de/examensarbeit.pdf
- ⁵ So erwähnt in Sylvester². Soweit ich weiß, hat Feigenbaum sein Verfahren mit einem einfachen Taschenrechner ausgeführt.

Anhang A

Java-Programm zur Berechnung des Feigenbaumpunkts und der Feigenbaumkonstanten.
Quelle: Sylvester²

```
public class FeigenbaumKonstante_R {

    double r0, r1, delta1;
    double nMax;
    double nrMax;
    double minDelta;

    public FeigenbaumKonstante_R() {
        r0 = 2.0;
        r1 = 1.0 + Math.sqrt(5);
        delta1 = 4.0;
        nMax = 20;
        nrMax = 20;
        minDelta = 1e-14;
    }

    public void rechne() {
        double rN2 = r0;
        double rN1 = r1;
        double deltaN1 = delta1;
        System.out.println("Berechnung des Feigenbaum-Punktes rN");
        System.out.println("und der Feigenbaum-Konstante deltaN1\n");
        System.out.println("=====");
        System.out.println("  n          rN          nr          deltaN1  ");
        System.out.println("-----");
        System.out.printf( "%3d %16.13f \n", 0, rN2 );
        System.out.printf( "%3d %16.13f %16.13f \n", 1, rN1, deltaN1 );
        for (int n = 2; n <= nMax; n++) {
            double rN = rN1 + (rN1 - rN2)/deltaN1;
            int nr = 0;
            for (double lastrN = rN - 1.0;
                (nr < nrMax) && (Math.abs((lastrN - rN)/rN) > minDelta); nr++) {
                lastrN = rN;
                double x = 0.5;
                double xBar = 0.0;
                long pow2N = 2 << (n - 1);
                for (long k = 0; k < pow2N ; k++) {
                    xBar = x*(1. - x) + rN*(1.0 - 2.0*x)*xBar;
                    x = rN*x*(1.0 - x);
                }
                x -= 0.5;
                rN -= x/xBar;
            } // for lastr ...
            deltaN1 = (rN1 - rN2)/(rN - rN1);
            System.out.printf("%3d %16.13f %3d %16.13f\n", n, rN, nr, deltaN1);
            rN2 = rN1;
            rN1 = rN;
        } // for int n...
        System.out.println("=====\n");
        System.out.println("Literaturwert = 4,669201609102990671853203820466... ");
    } // end rechne...

    public static void main(String[] args) {
        FeigenbaumKonstante_R fK = new FeigenbaumKonstante_R();
        fK.rechne();
    }
}
```

Anhang B

Maple-Programm zur Darstellung der Iterations-Treppen und des Iterations-Spinnennetzes.
Quelle: Grcech⁴

```
restart: with(plots):
fixPktIter := proc (start, populationskonstante, schrittzahl)
    local k, x, a, liste1, liste2, f, g, h;
    liste1 := [[start,0]];
    f := z -> z;
    g := z -> populationskonstante*z*(1-z);
    h := z -> 0.5;
    x := start;
    a := populationskonstante;
    for k from 1 to schrittzahl do
        liste2 := [x, 0];
        x := a*x*(1-x);
        liste2[2] := x;
        liste1 := [op(liste1), liste2];
        liste1 := [op(liste1), [x, x]];
    end do;
    plot([f(z), g(z), h(z), liste1], z = 0..1,
        style = line, color = [navy, red, olive, black], view = [0..1,0..1], axes = boxed);
end proc;
```